Profesor:
Jonathan Cumpa Velásquez

TRIGONOMETRÍA

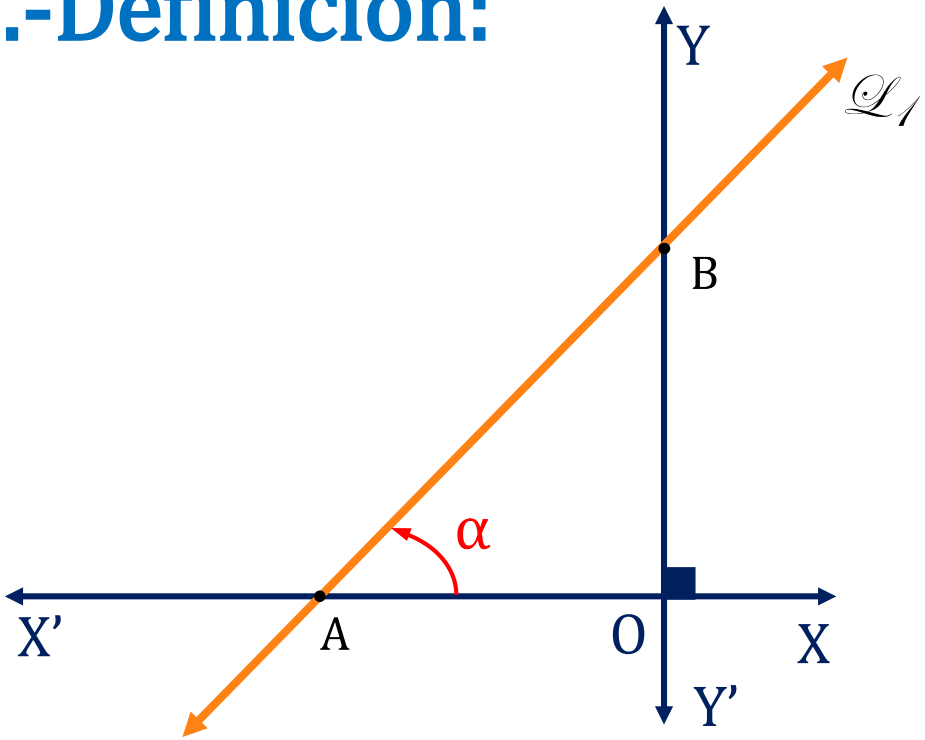
GRUPO PITÁGORAS

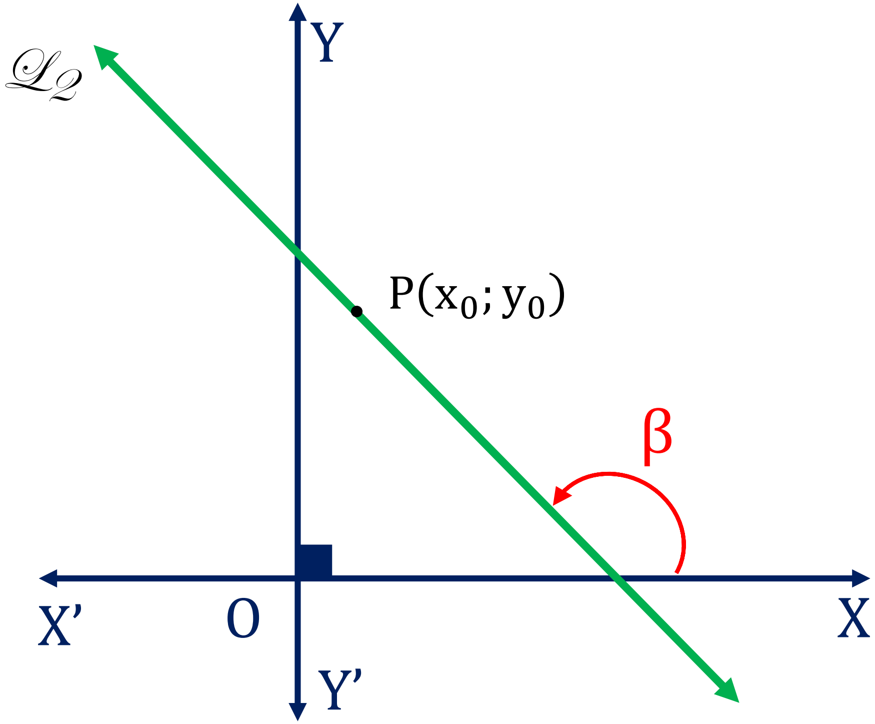
GEOMETRÍA ANALÍTICA

LA RECTA

LA RECTA

1.-Definición:



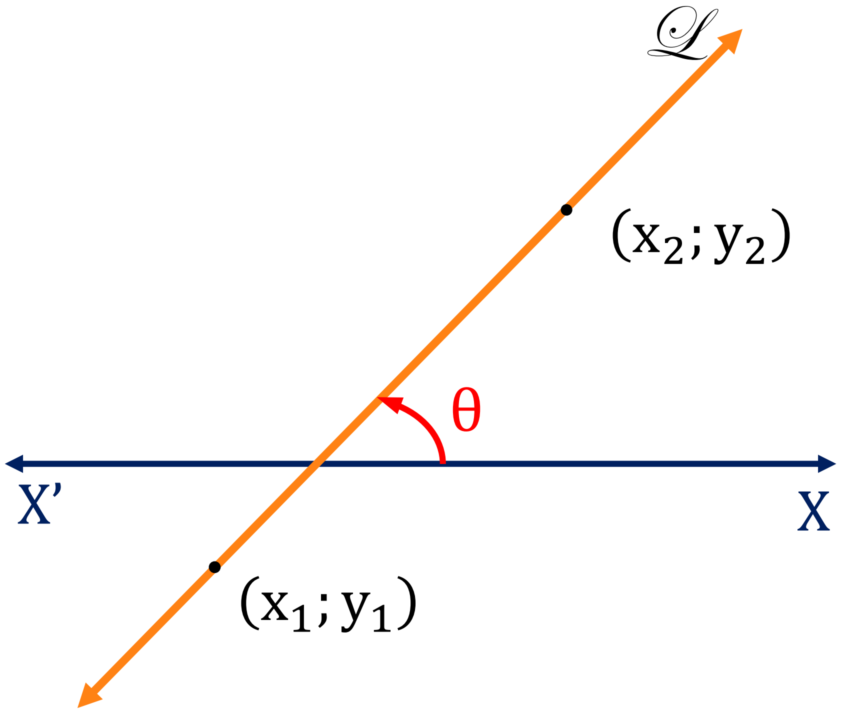


- $\alpha \wedge \beta$: Ángulos de inclinación

$$\boxed{0 \leq \alpha \wedge \beta \leq 180°}$$

- $P(x_0; y_0)$: Punto de paso
- A y B: Interceptos

2.-Pendiente(m):



- $\boxed{m = \text{Tan}\theta}$

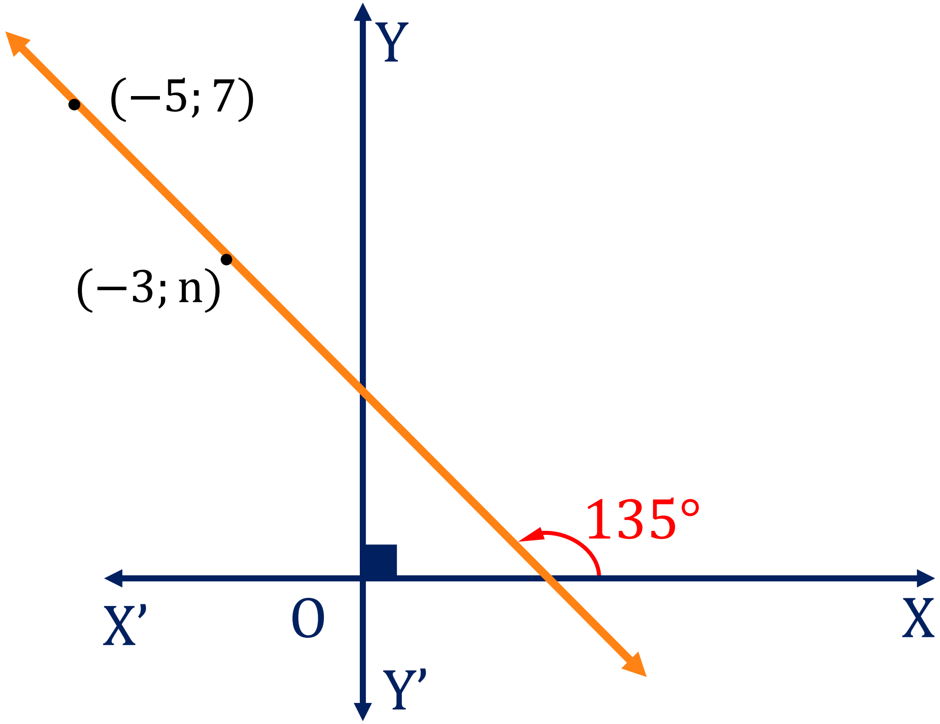
$$\begin{cases} \text{Si:} \quad 0 < \theta < 90° & \Longrightarrow \quad m > 0 \\ \text{Si:} \quad \theta = 90° & \Longrightarrow \quad m: \nexists \\ \text{Si:} \quad 90° < \theta < 180° & \Longrightarrow \quad m < 0 \\ \text{Si:} \quad \theta = 180° & \Longrightarrow \quad m = 0 \end{cases}$$

- $\boxed{m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \; ; x_1 \neq x_2$

Ejemplos:

El ángulo de inclinación de una recta es 135°. Si pasa por los puntos (-3; n) y (-5; 7), hallar el valor de "n"

A) 1 B) 3 ~~C)~~ 5 D) 7 E) 9



i. $m = \text{Tan}\theta = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

$$\text{Tan}135° = \frac{7-n}{-5-(-3)}$$

$$-1 = \frac{7-n}{-2}$$

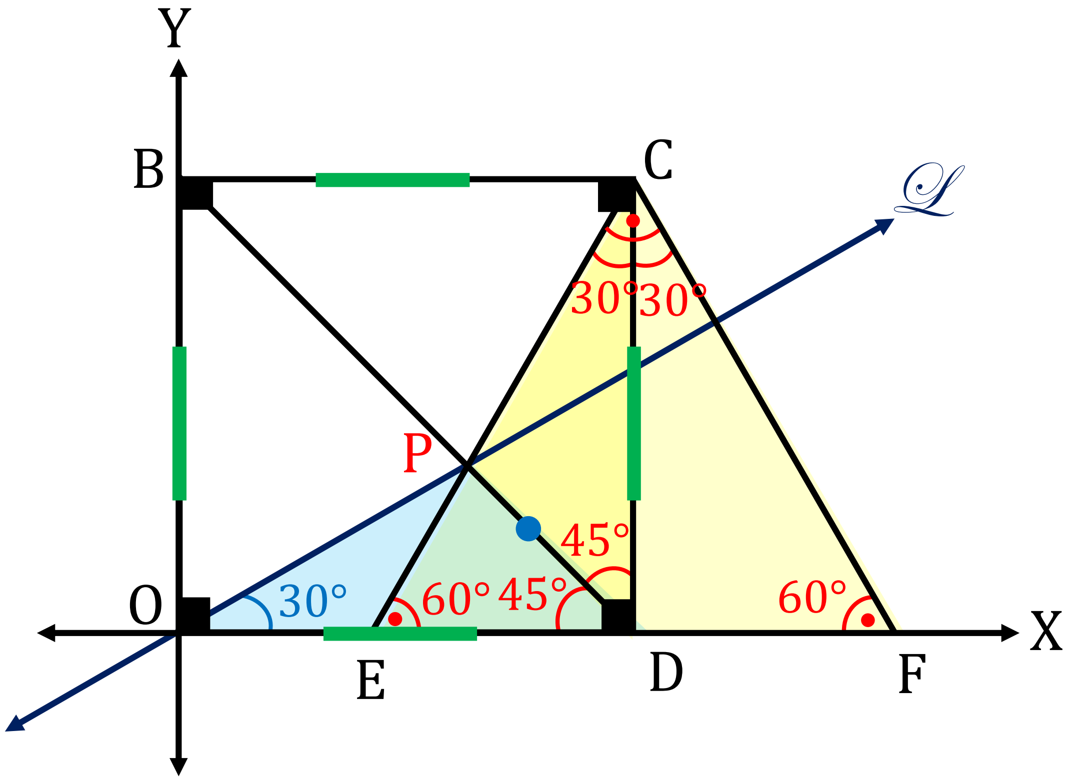
$$2 = 7 - n$$

$$\mathbf{5 = n}$$

Ejemplos:

En la figura, OBCD es un cuadrado y CEF un triangulo equilátero. Halle la pendiente de la recta.

A) $\sqrt{3}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ~~C)~~ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D) 3 E) $3\sqrt{3}$

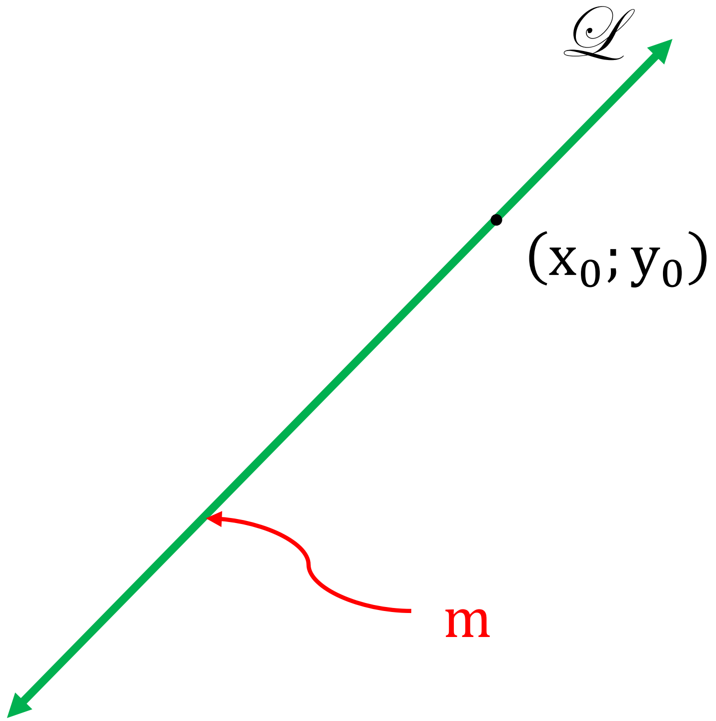


- $\triangle$ PDC $\cong \triangle$ PDO por L – A – L
- m = Tan30°

$$\therefore \mathbf{m} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

3.-Ecuación de la recta:

a) Forma Punto de paso-Pendiente:



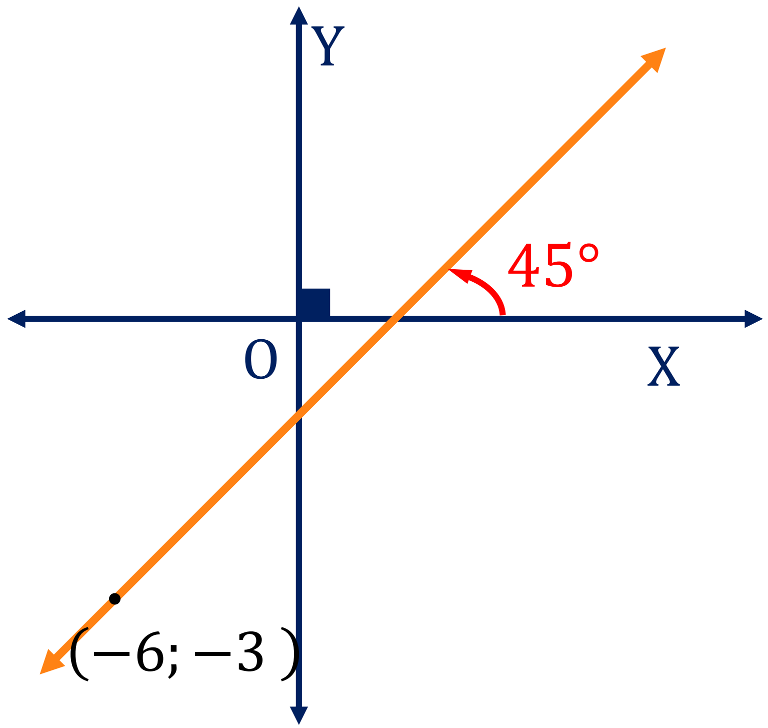
$$\boxed{\mathbf{y - y_0 = m(x - x_0)}}$$

Ejemplos:

Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto A(-6;-3) y tiene un ángulo de inclinación de 45°.

A) $x - y + 3 = 0$ B) $x = y$ C) $x + y + 1 = 0$

D) $x + y - 1 = 0$ E) $3x - y = 3$



- $m = \text{Tan}45°$

  $m = 1$

- $\text{Punto} - \text{Pendiente}:$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - (-3) = 1\ (x - (-6))$$

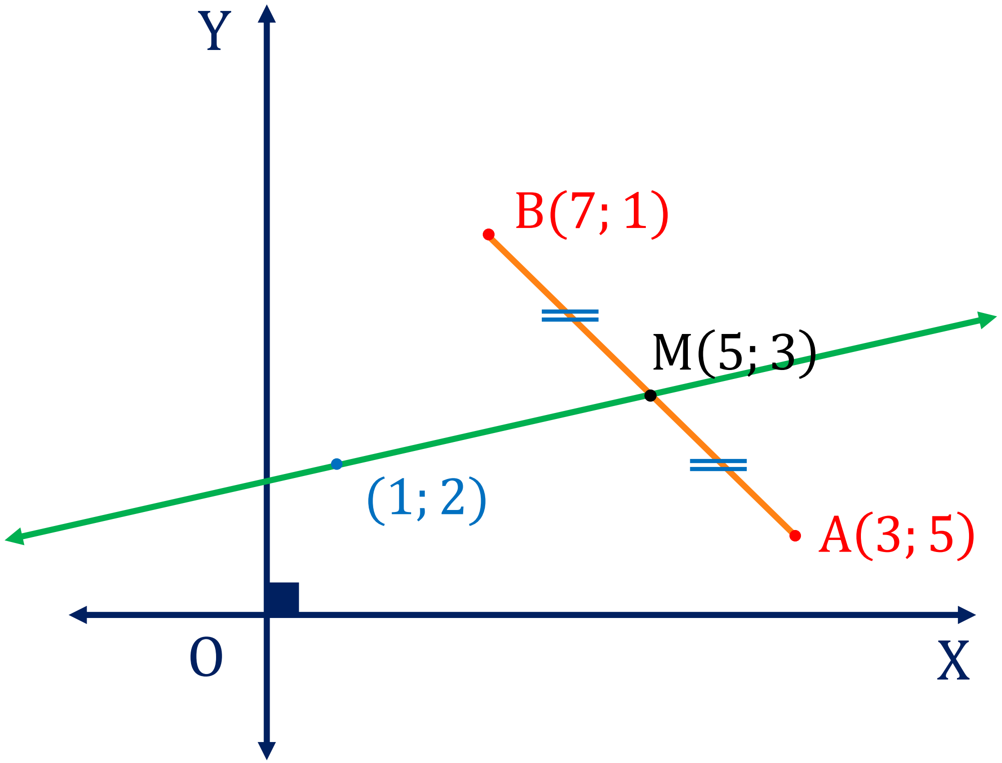
$$y + 3 = x + 6$$

$$\mathbf{x - y + 3 = 0}$$

Ejemplos:

Determine la ecuación de la recta que pasa por el punto medio del segmento $\overline{AB}$ y el punto (1; 2) sabiendo que : A(3; 5) y B(7; 1)

A) $4x + y = 3$ B) $4x - y = 5$ ~~C)~~ $4y - x = 7$ D) $4y + x = 3$ E) $2x + y = 5$



- $m = \dfrac{3-2}{5-1}$

  $m = \dfrac{1}{4}$

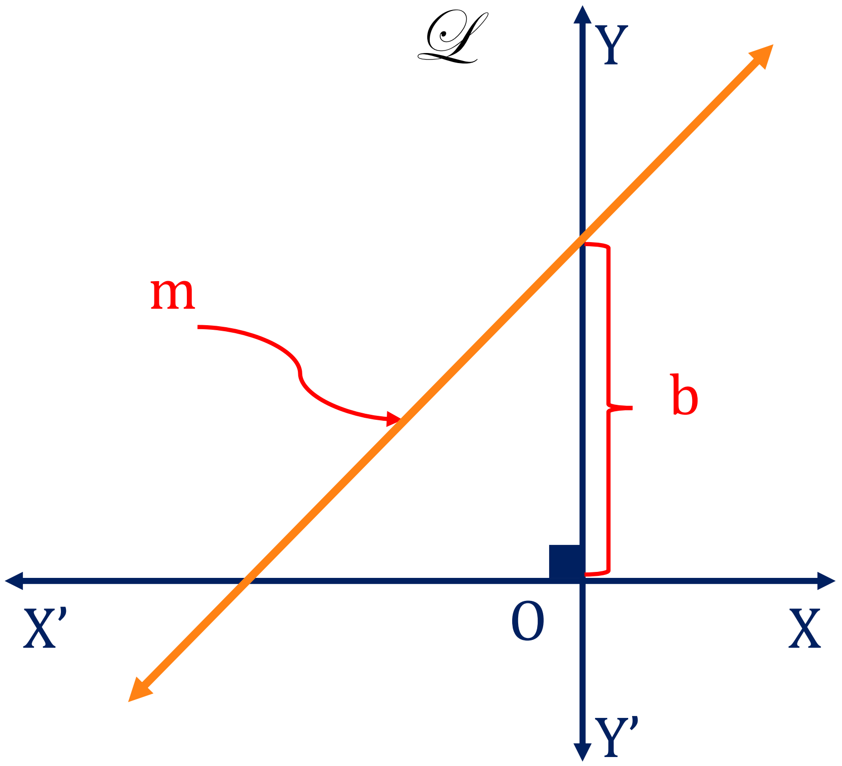
- Punto – Pendiente:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 2 = \frac{1}{4}(x - 1)$$

$$\mathbf{4y - x = 7}$$

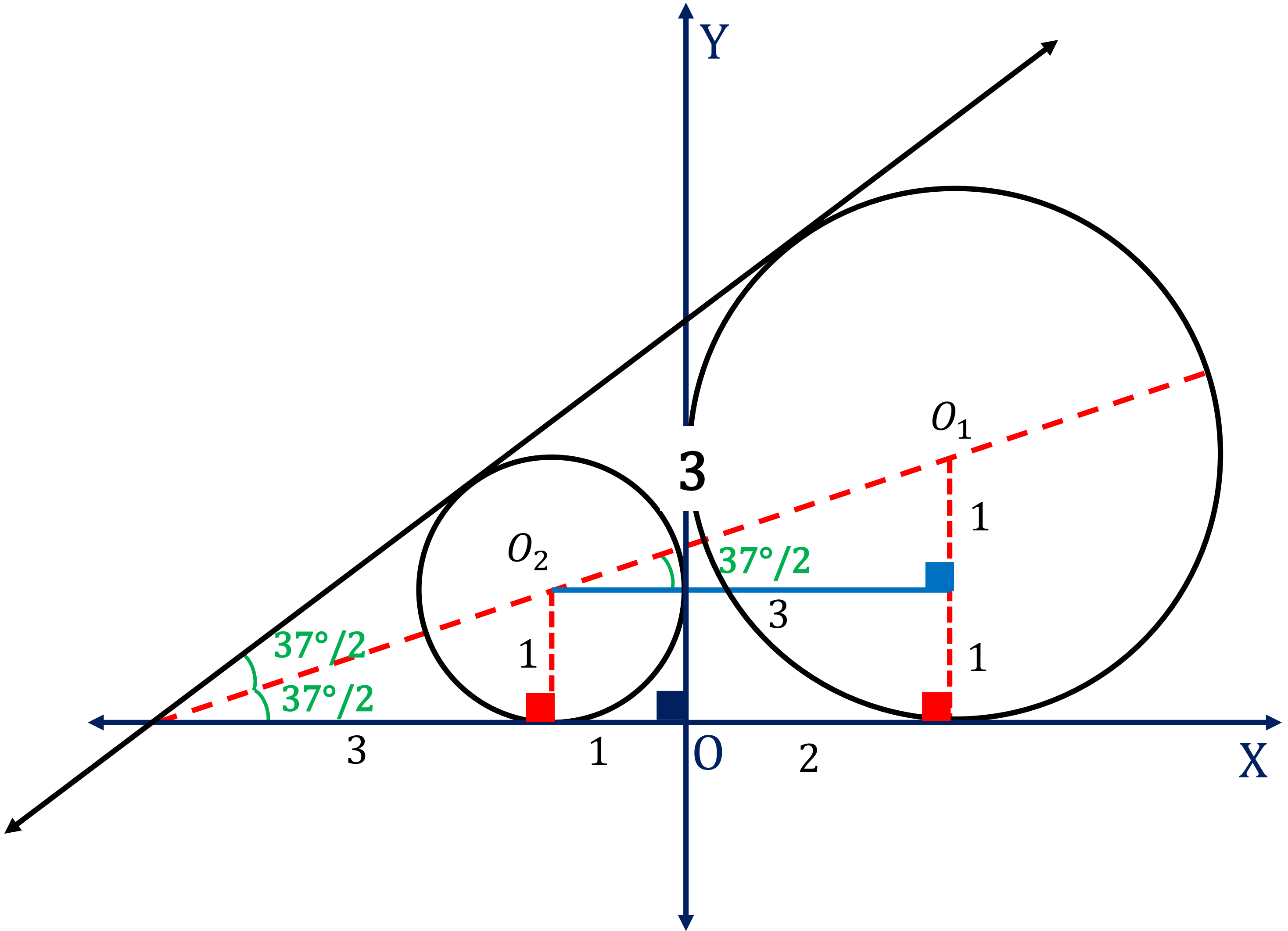
b) Forma Pendiente - Intercepto:



$$\boxed{y = mx + b}$$

Ejemplos:

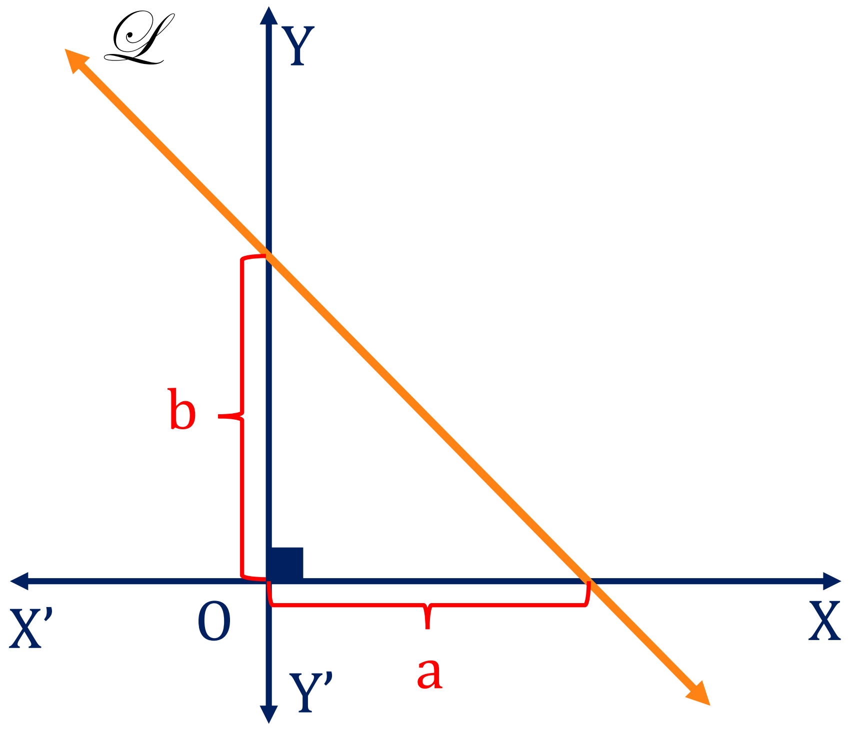
Si L es tangente a las circunferencias de centros $O_1(2;2)$ y $O_2(-1;1)$, hallar su ecuación



y = mx + b

$$y = \frac{3}{4}x + 3$$

c) Forma Simétrica :



$$\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{a}} + \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{b}} = \mathbf{1}$$

Ejemplos:

Indicar la ecuación de la recta "L"

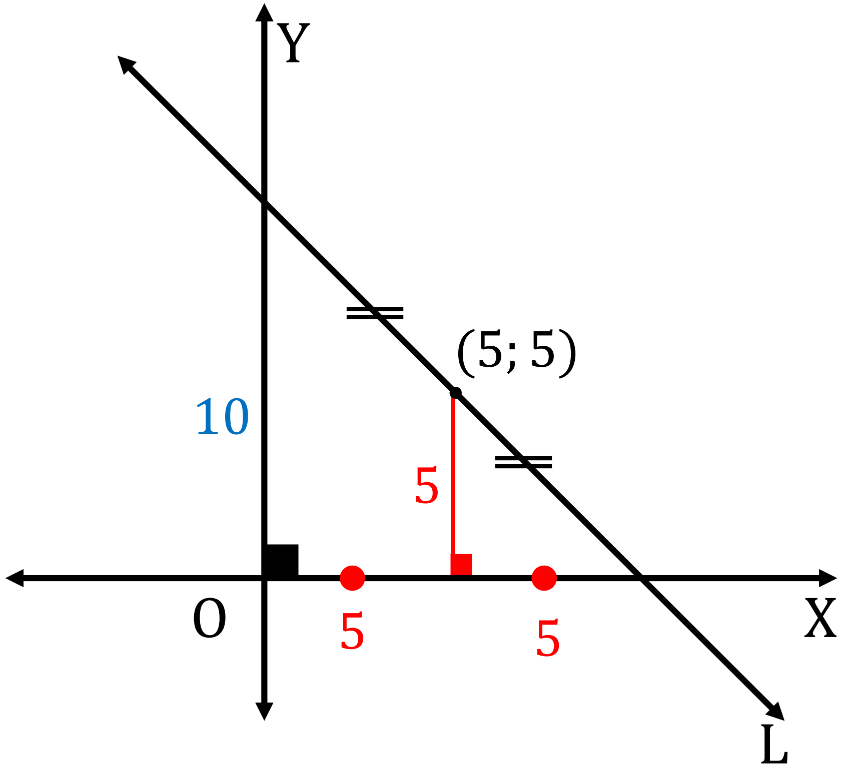
A) $\frac{x}{-10}+\frac{y}{20}=1$

B) $\frac{x}{10}+\frac{y}{-20}=1$

$\cancel{C)}$ $\frac{x}{10}+\frac{y}{10}=1$

D) $\frac{x}{10}+\frac{y}{-10}=1$

E) $\frac{x}{-10}+\frac{y}{-10}=1$



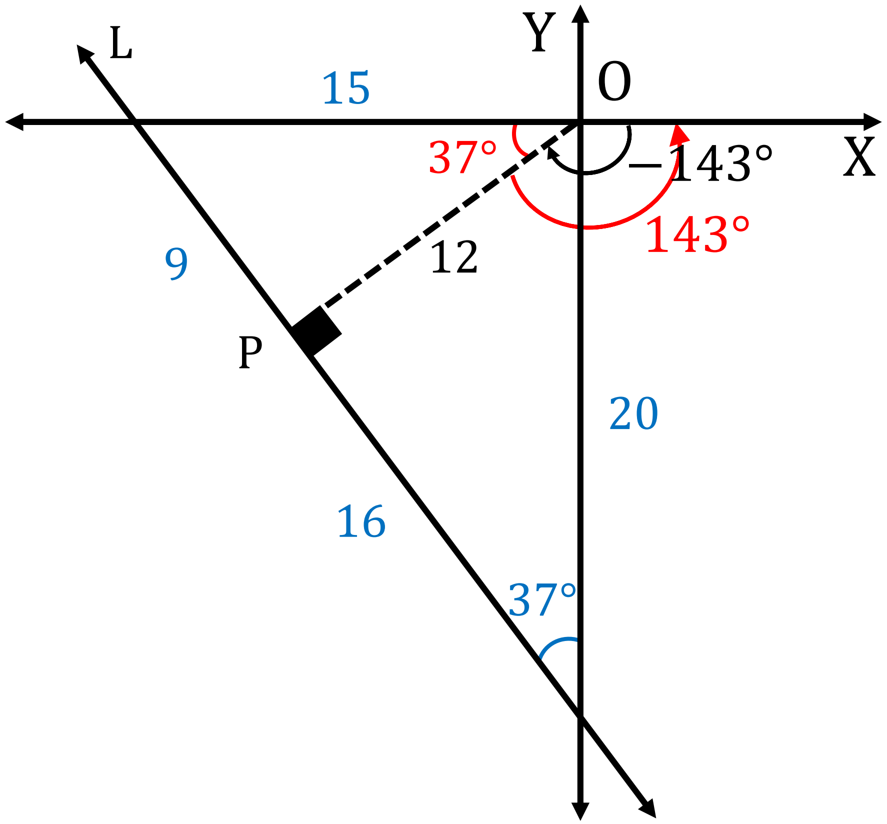
$$\mathbf{L:\ \frac{x}{10}+\frac{y}{10}=1}$$

Ejemplos:

Hallar la ecuación de la recta L si OP=12.

~~A)~~ $\frac{x}{-15}+\frac{y}{-20}=1$ B) $\frac{x}{-20}+\frac{y}{-15}=1$ C) $\frac{x}{-3}+\frac{y}{-4}=1$

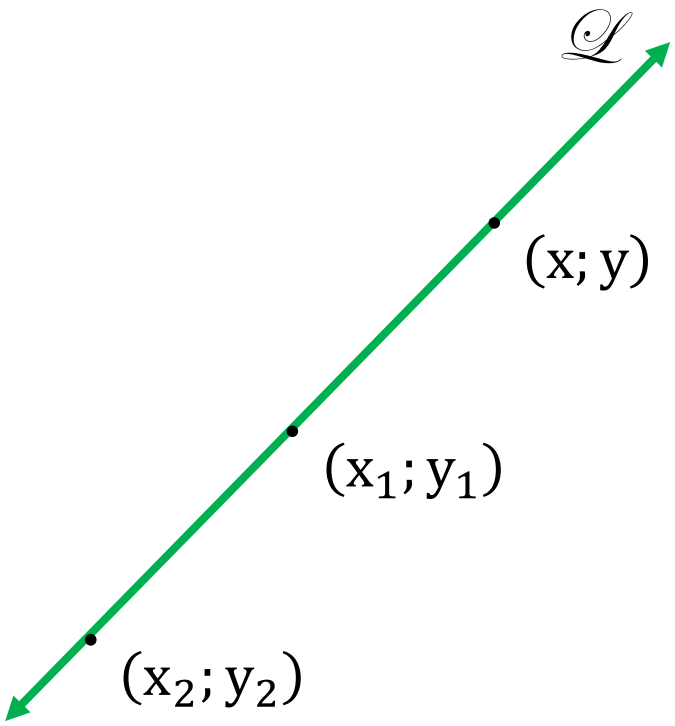
D) $\frac{x}{-4}+\frac{y}{-3}=1$ E) $\frac{x}{20}+\frac{y}{-15}=1$



$$\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{a}}+\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{b}}=\mathbf{1}$$

$$\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{-15}}+\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{-20}}=\mathbf{1}$$

d) Forma Cartesiana :



$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

Ejemplos:

Del grafico mostrado, determine la ecuación de L.

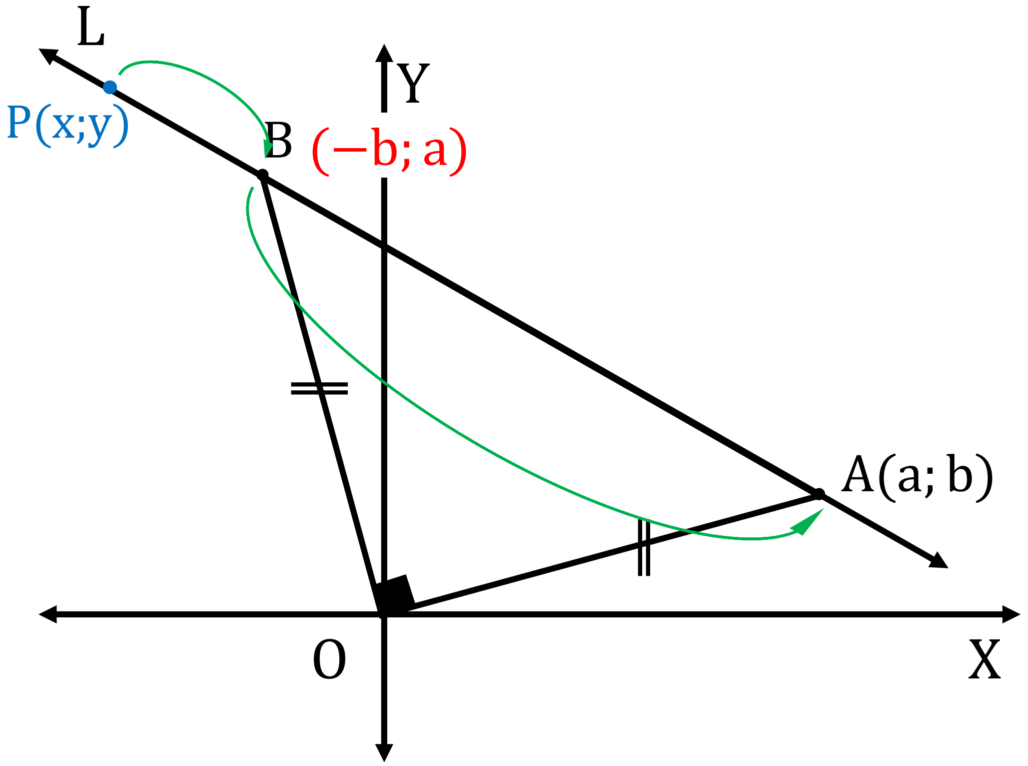
A) $(a+b)x+(a-b)y=a^2-b^2$

B) $(a+b)x+(a-b)y=a^2+b^2$

C) $(a-b)x+(a+b)y=a^2+b^2$

D) $(a-b)x+(a+b)y=a^2-b^2$

E) $(a+b)x+(a+b)y=ab$



- Por coord. Ortogonales: B(-b ; a)
- Sea P(x;y) un punto móvil de L
- $$\frac{y-a}{x-(-b)}=\frac{a-b}{-b-a}$$

$$(a+b)(a-y)=(a-b)(x+b)$$

$$\mathbf{(a-b)x+(a+b)y=a^2+b^2}$$

e) Forma General :

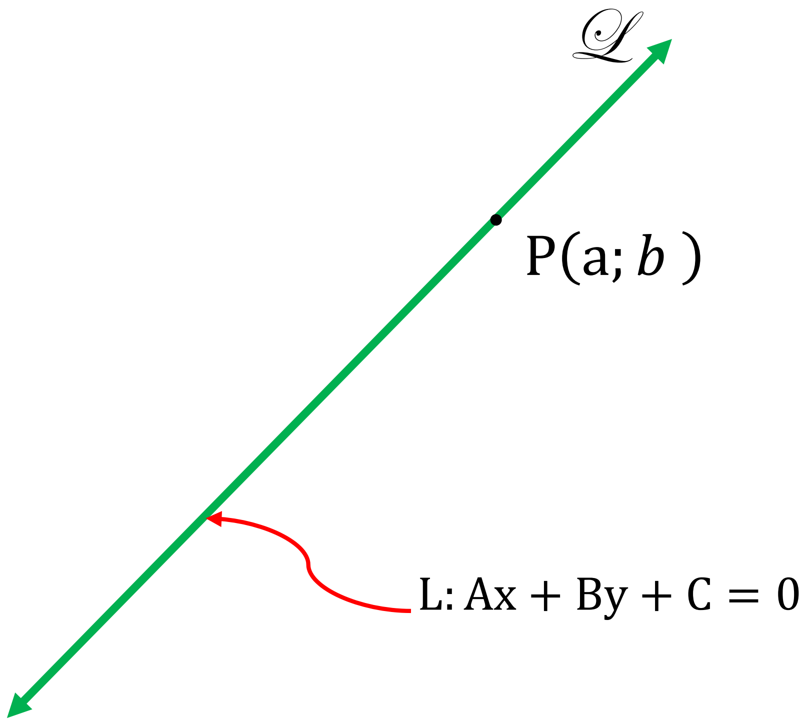
$$\mathscr{L}: Ax + By + C = 0$$

$$m = -\frac{\text{Coef. de "x"}}{\text{Coef. de "y"}}$$

$$\boxed{m = -\frac{A}{B}}$$

❖ Notas:

i. Si $P(a; b) \in L: Ax + By + C = 0 \Rightarrow A(a) + B(b) + C = 0$

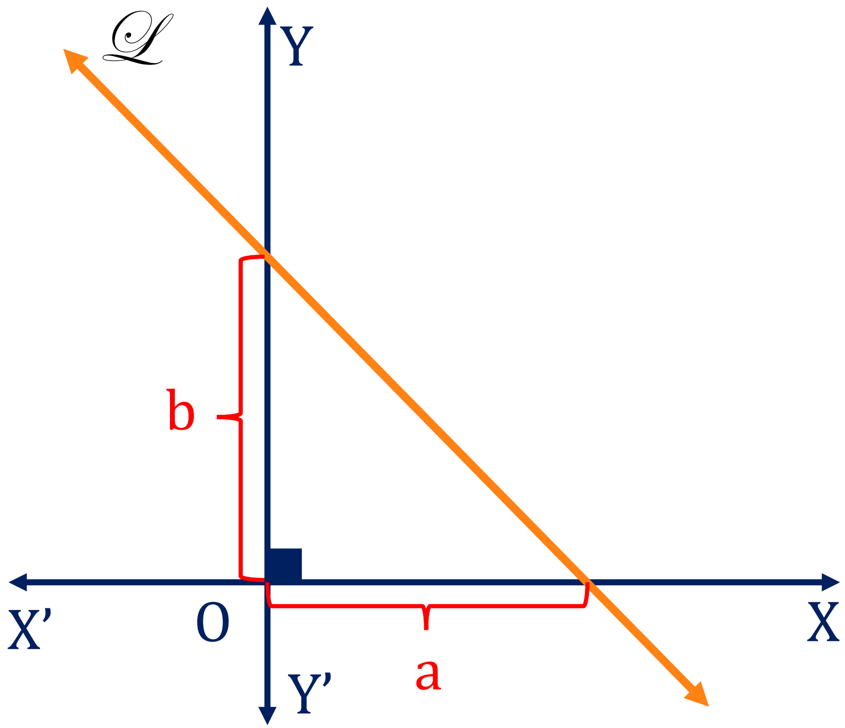


LA RECTA

❖ Notas:

ii. Intersección con los ejes coordenados(coordenadas al origen)

- Intersección con el eje X: y=0 se reemplaza en la ecuación entonces x=a
- Intersección con el eje Y: x=0 se reemplaza en la ecuación entonces y=b

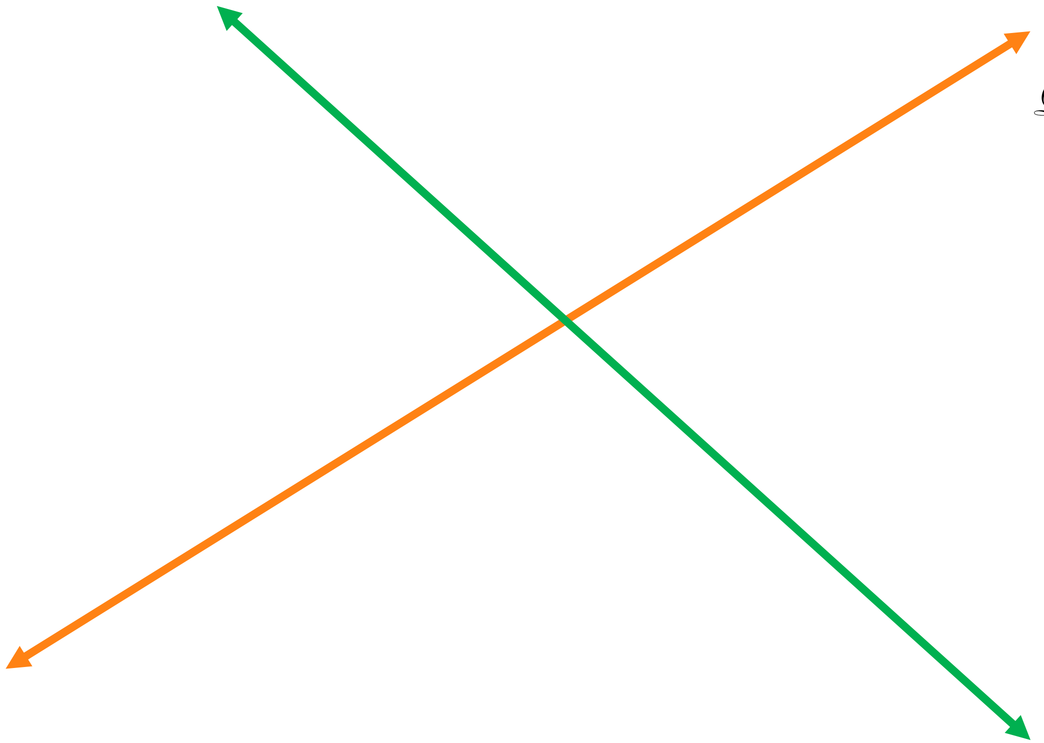


❖ Notas:

iii. Intersección en uno y solamente un punto: dos rectas se intersectan en único punto en el caso que no sean paralelas.

Sea $L_1: Ax + By + C = 0 \wedge L_2: A'x + B'y + C' = 0$

$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$; o sea, que $A.B' - A'.B \neq 0$

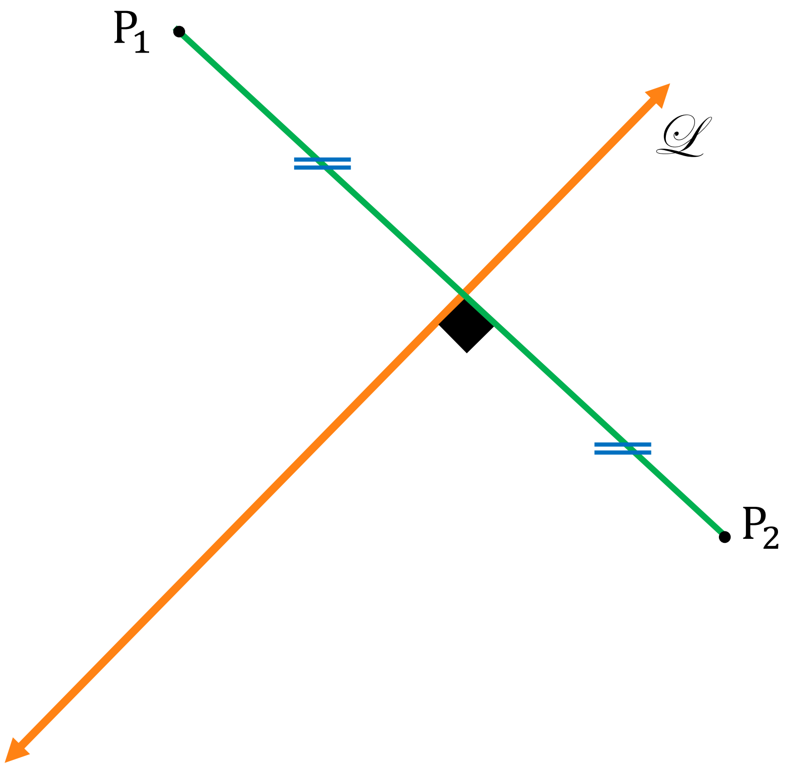


$\mathscr{L}_1: Ax + By + C = 0$

$\mathscr{L}_2: A'x + B'y + C' = 0$

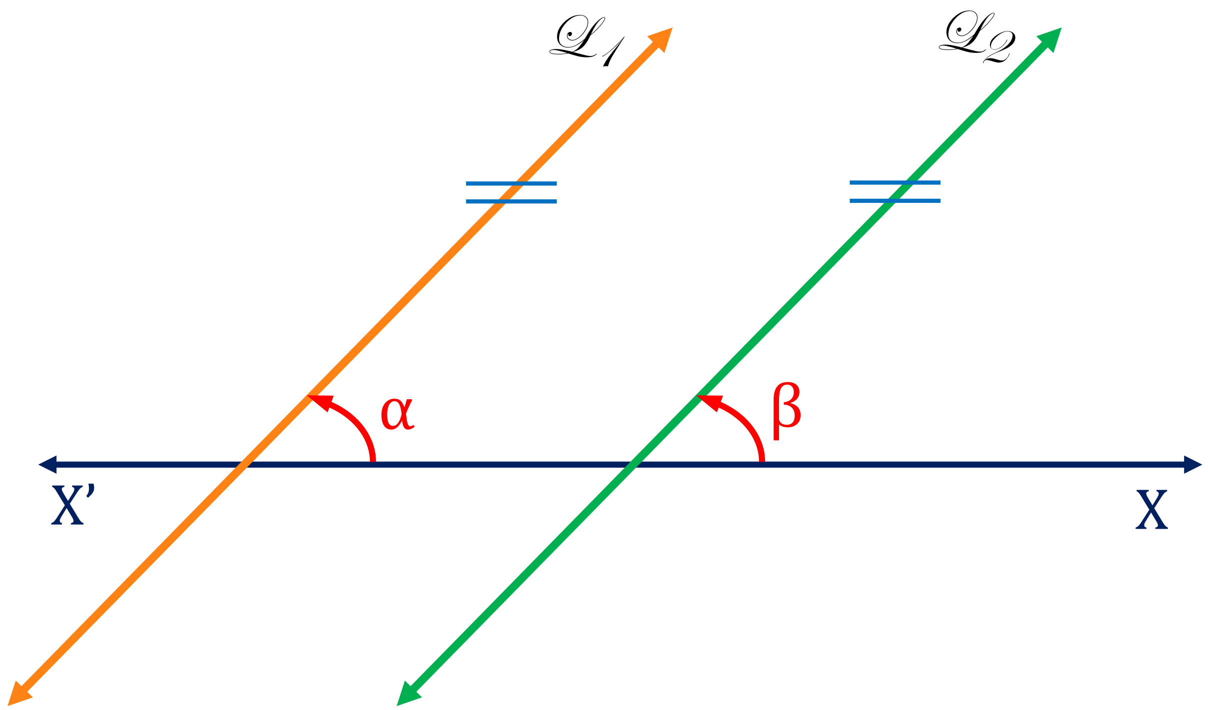
❖ Notas:

iv. Simetría dos puntos P_1 y P_2 diremos que están localizados simétricamente con respecto a una recta L si y solo si L es la mediatriz del segmento que los une .



4.- Propiedades:

a) Rectas paralelas:



$\Rightarrow$ Si: $\mathscr{L}_1 \parallel \mathscr{L}_2$

$$\alpha = \beta$$

$$\text{Tan}\alpha = \text{Tan}\beta$$

$$\boxed{\mathbf{m_1 = m_2}}$$

LA RECTA

❖ Importante !!

Sea $L_1: Ax + By + C = 0 \wedge L_2: A'x + B'y + C' = 0$

$$m_1 = -\frac{A}{B} \text{ si } B \neq 0 \quad y \quad m_2 = -\frac{A'}{B'} \text{ si } B' \neq 0$$

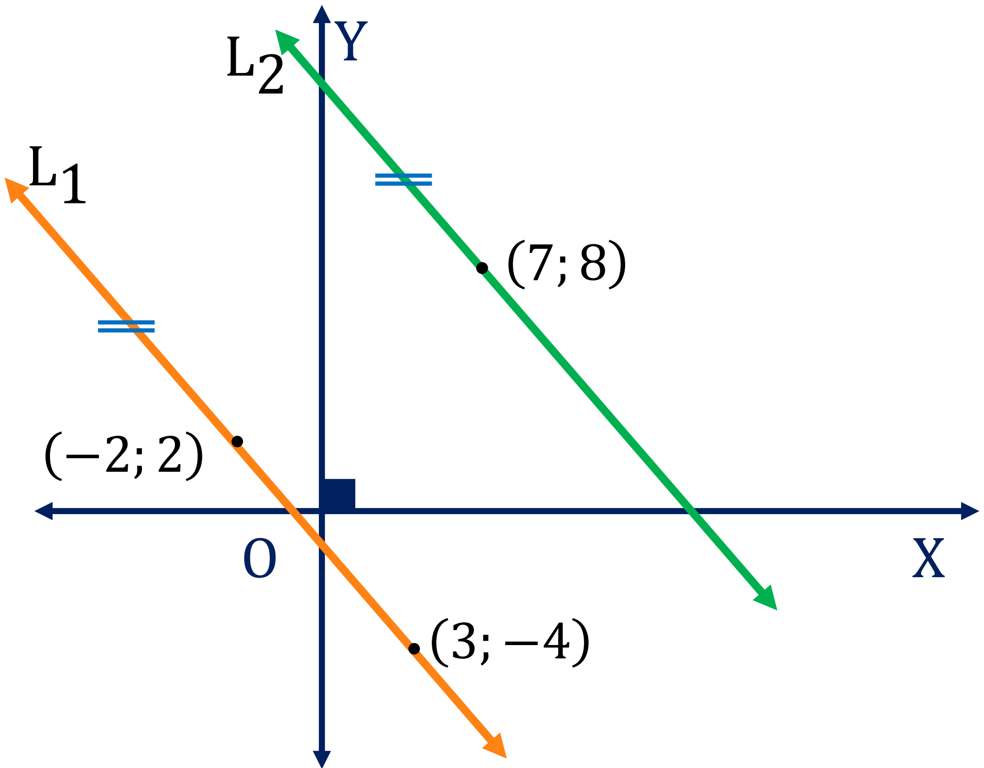
Por teorema si $L_1 \parallel L_2: -\frac{A}{B} = -\frac{A'}{B'}$ o sea $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \Leftrightarrow$ $\boxed{A.B' - A'.B = 0}$

Ejemplos:

Una recta pasa por el punto A(7;8) y es paralela a la recta que pasa por C(-2;2) y D(3;-4). Hallar su ecuación.

~~A)~~ $6x + 5y - 82 = 0$ B) $3x + 5y - 42 = 0$ C) $2x + 5y - 21 = 0$

D) $x + 3y + 42 = 0$ E) $5x + y + 21 = 0$



- En L_1:

$$m_1 = \frac{2-(-4)}{-2-3} \Longrightarrow m_1 = -\frac{6}{5}$$

- $L_1 \parallel L_2 \Longrightarrow m_1 = m_2$

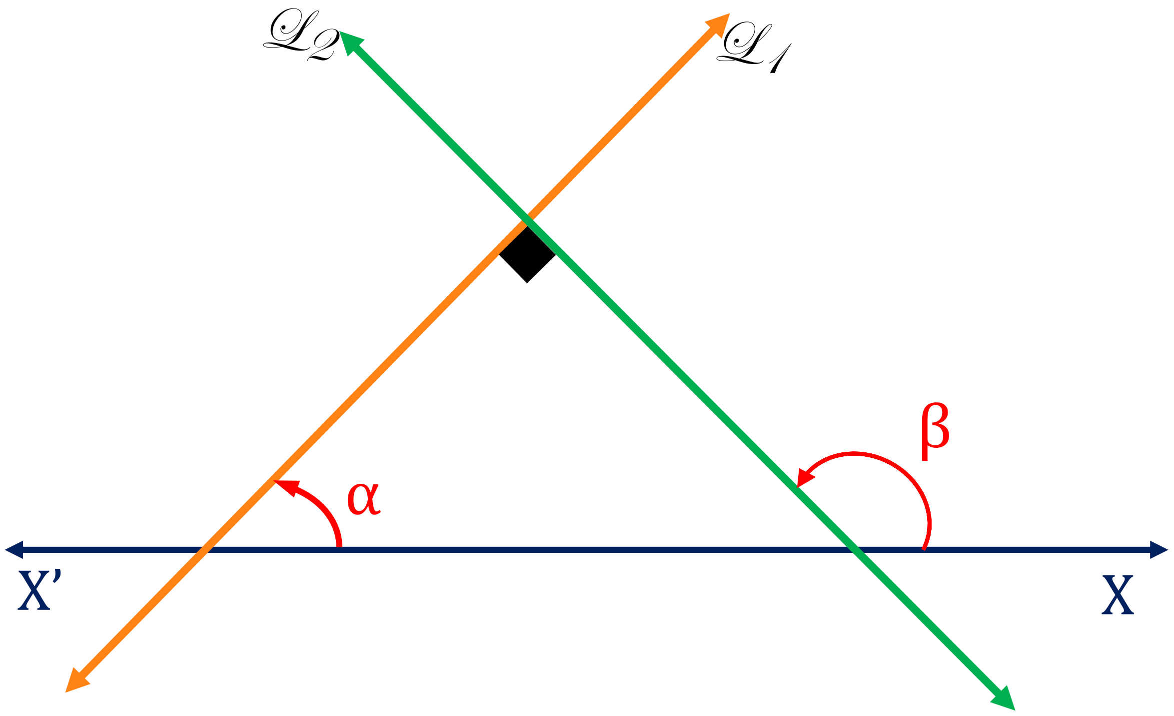
$$\Longrightarrow m_2 = -\frac{6}{5}$$

- Punto – Pendiente:

$$L_2:\ y - 8 = -\frac{6}{5}(x - 7)$$

$$\mathbf{L_2: 6x + 5y - 82 = 0}$$

b) Rectas perpendiculares:



$\Longrightarrow$ Si: $\mathscr{L}_1 \perp \mathscr{L}_2$

$$\boxed{\mathbf{m_1 . m_2 = -1}}$$

Importante !!

Sea $L_1: Ax + By + C = 0 \wedge L_2: A'x + B'y + C' = 0$

$$m_1 = -\frac{A}{B} \text{ si } B \neq 0 \quad \text{y} \quad m_2 = -\frac{A'}{B'} \text{ si } B' \neq 0$$

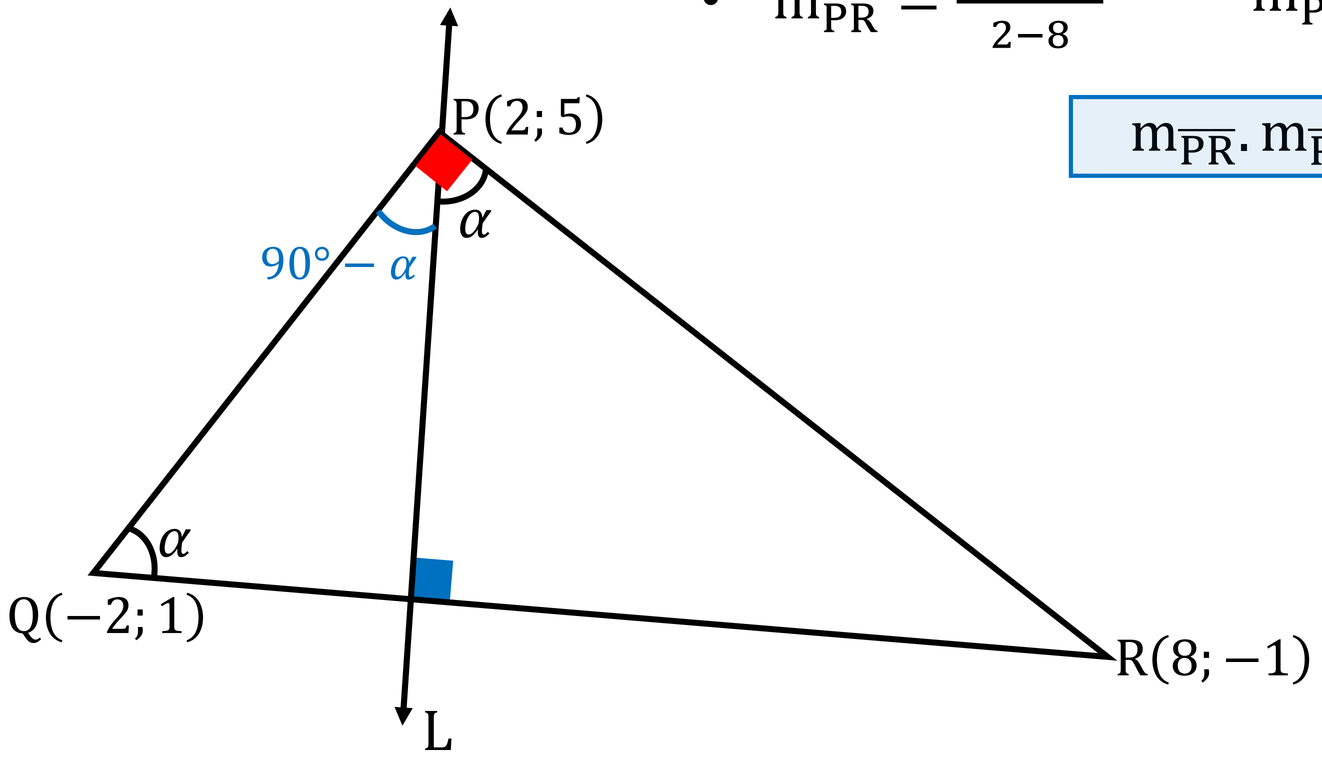
Por teorema: si $L_1 \perp L_2 : \left(-\frac{A}{B}\right)\left(-\frac{A'}{B'}\right) = -1 \Leftrightarrow$ $\boxed{\mathbf{A.A' + B'.B = 0}}$

Ejemplos:

Determine la ecuación de la recta L.

A) $5x + y - 15 = 0$ B) $3x - y - 11 = 0$ C) $4x + 2y - 18 = 0$

D) $7x + y - 19 = 0$ ~~E)~~ $5x - y - 5 = 0$



- $m_{\overline{PR}} = \frac{5-(-1)}{2-8} \Longrightarrow m_{\overline{PR}} = -1$ ‖ • $m_{\overline{PQ}} = \frac{5-1}{2-(-2)} \Longrightarrow m_{\overline{PQ}} = 1$

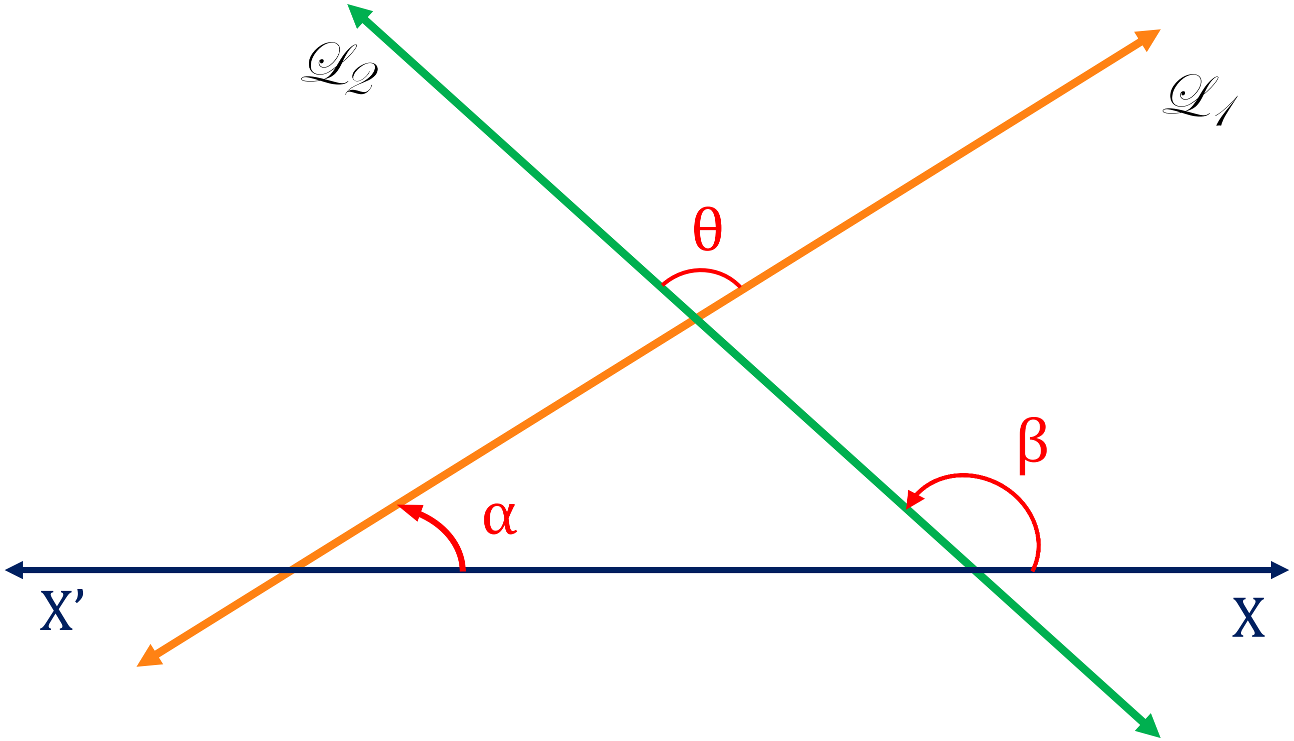
$\boxed{m_{\overline{PR}}.m_{\overline{PQ}} = -1} \Longrightarrow \overline{PR} \perp \overline{PQ} \Longrightarrow \measuredangle P = 90°$

- $m_{\overline{QR}} = \frac{1-(-1)}{-2-8} \Longrightarrow m_{\overline{QR}} = -\frac{1}{5}$
- $\boxed{m_L.m_{\overline{QR}} = -1} \Longrightarrow m_L = 5$
- $y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - 5 = 5(x - 2)$

$5x - y - 5 = 0$

c) Ángulo entre 2 rectas:

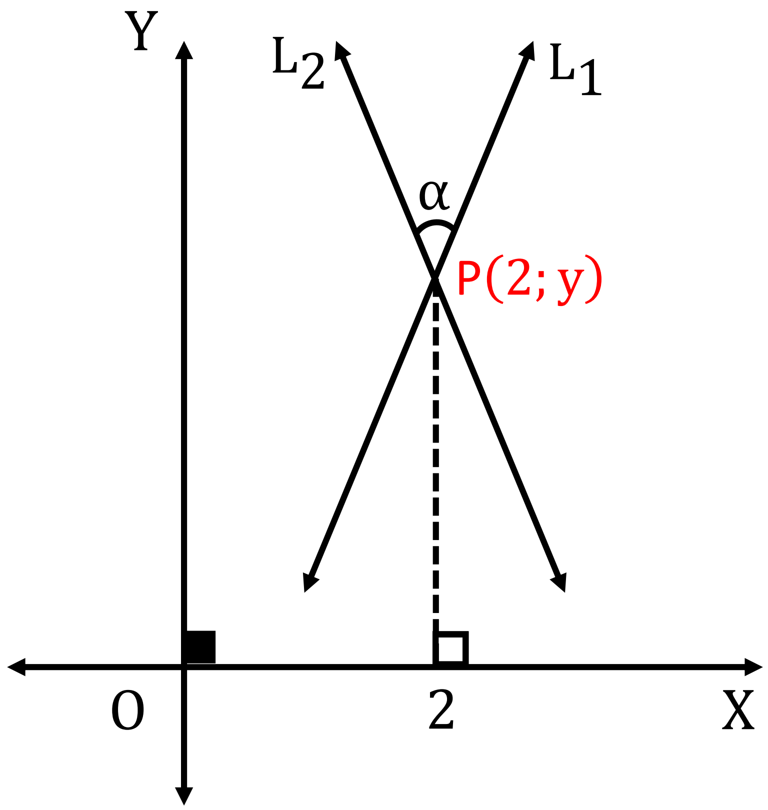


$$\text{Tan}\theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 . m_1}\right|$$

Ejemplos:

En la figura $L_1: 2x - y - 3 = 0$ y $L_2: (k+1)x + y - 7 = 0$. Halle α.

A) 30° B) 60° ~~C)~~ 45° D) 37° E) 53°



- En $L_1: 2x - y - 3 = 0$

$$m_1 = \frac{-2}{-1} \Longrightarrow m_1 = 2$$

- $P \in L_1:$

$$\Longrightarrow 2(2) - y - 3 = 0 \Longrightarrow y = 1$$

- $P \in L_2: (k+1)x + y - 7 = 0$

$$(k+1)2 + 1 - 7 = 0$$

$$k = 2$$

- $L_2:\ 3x + y - 7 = 0$

$$m_2 = \frac{-3}{1} \Longrightarrow m_2 = -3$$

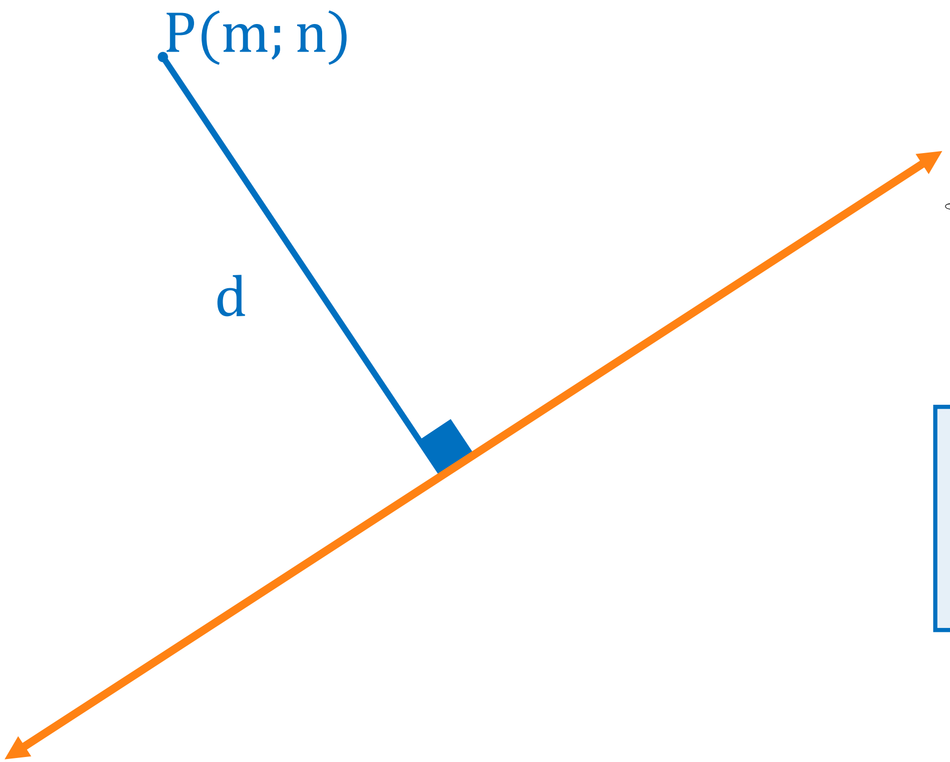
$$\text{Tan}\alpha = \left|\frac{-3-2}{1+(-3).2}\right|$$

$$\text{Tan}\alpha = \left|\frac{-5}{-5}\right|$$

$$\text{Tan}\alpha = 1$$

$$\alpha = 45°$$

d) Distancia de un punto a la recta :

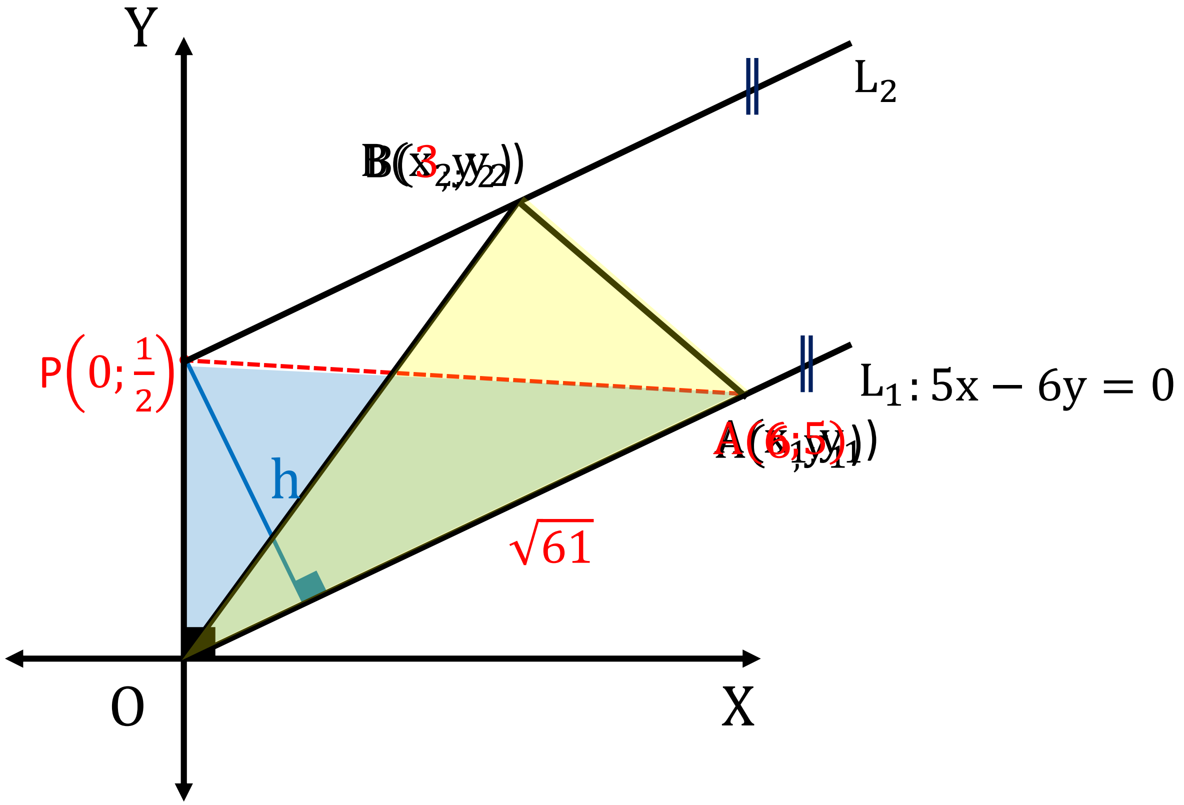


$\mathscr{L}: \mathrm{Ax} + \mathrm{By} + \mathrm{C} = 0$

$$\boxed{\mathrm{d} = \frac{|\mathrm{A(m)} + \mathrm{B(n)} + \mathrm{C}|}{\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2}}}$$

Ejemplos:

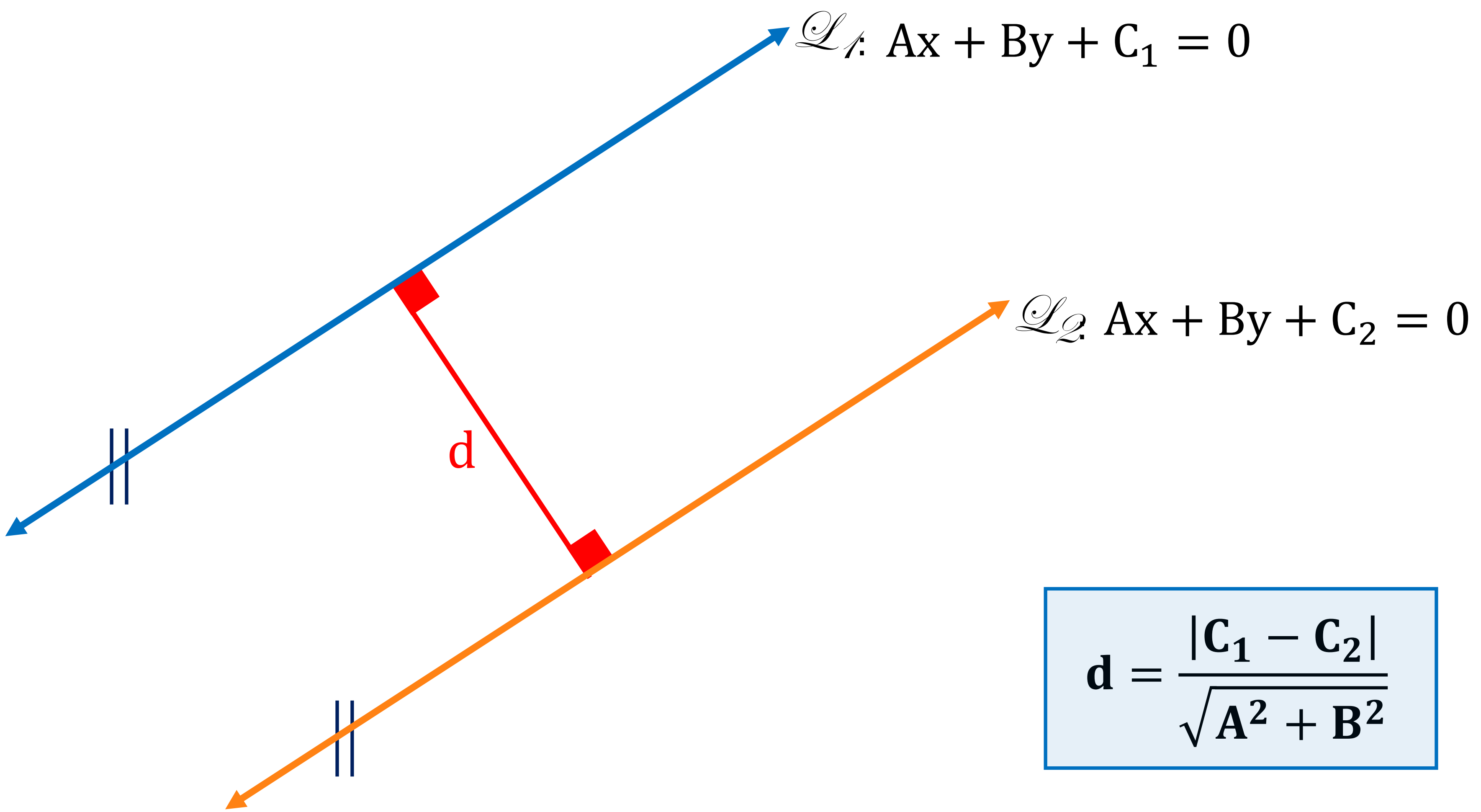
En la figura mostrada, la recta L_1 es paralela a la recta L_2; además la ecuación de L_1 es 5x-6y=0; y la intersección de L_2 con el eje de ordenadas de $\frac{1}{2}$. Calcule, en u^2, el área de la región triangular ABO, si $x_1 = 6 \ \wedge x_2 = 3$



- $\text{Área del} \triangle \text{ABO} = \text{Área del} \triangle \text{OPA}$
- $A \in L_1$

  $5(6) - 6y = 0 \Longrightarrow y = 5$
- $\overline{OA} = \sqrt{6^2 + 5^2} \Longrightarrow \overline{OA} = \sqrt{61}$
- $h = \dfrac{\left|5(0)+(-6)\left(\frac{1}{2}\right)+0\right|}{\sqrt{6^2+5^2}} \Longrightarrow h = \dfrac{3}{\sqrt{61}}$
- $\text{Área del} \triangle \text{OPA} = \dfrac{\cancel{\sqrt{61}}\ x\ \dfrac{3}{\cancel{\sqrt{61}}}}{2}$
- $\text{Área del} \triangle \text{OPA} = \dfrac{3}{2} u^2$

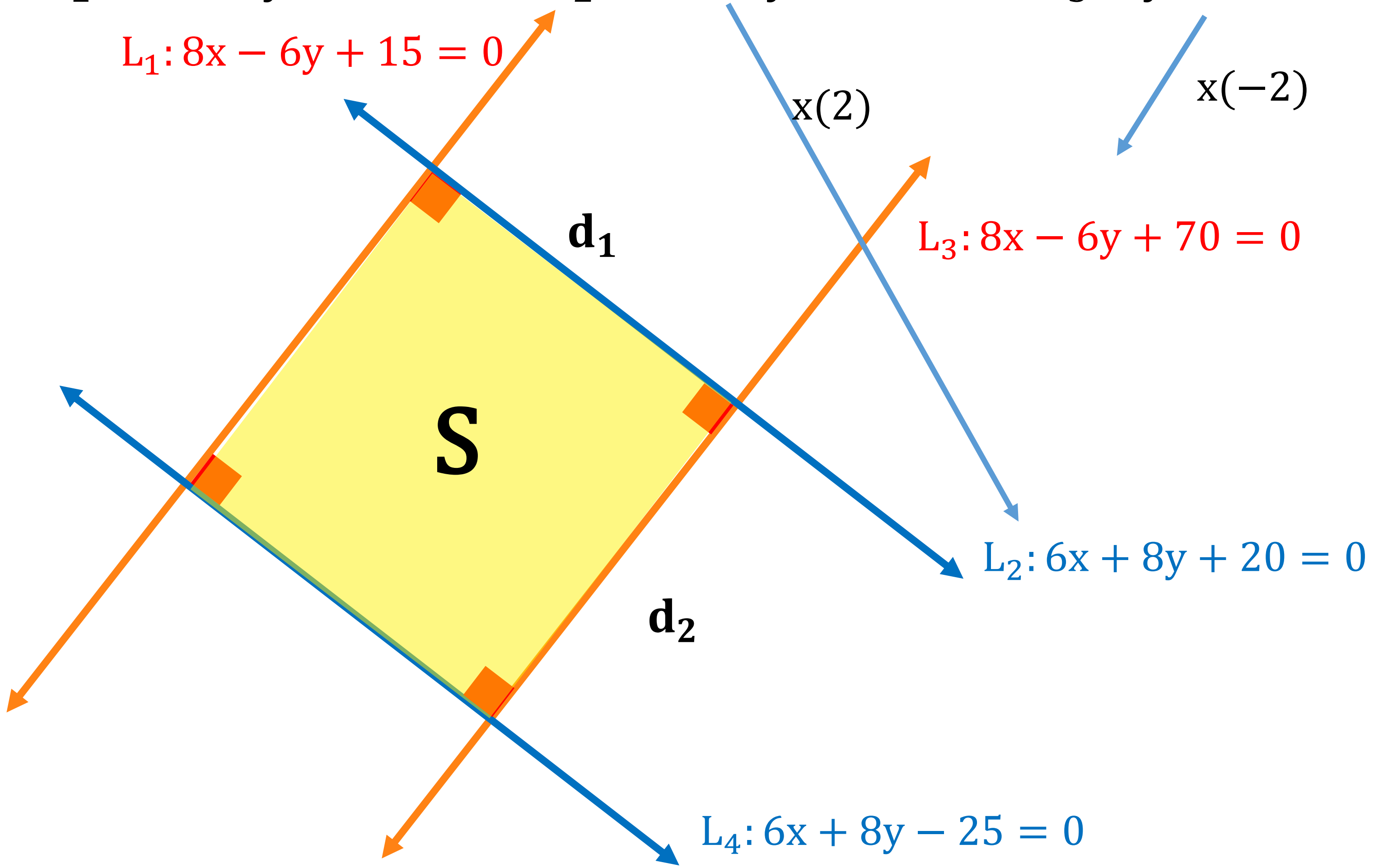
e) Distancia entre rectas paralelas:



$$\mathbf{d} = \frac{|\mathbf{C_1} - \mathbf{C_2}|}{\sqrt{\mathbf{A^2} + \mathbf{B^2}}}$$

Ejemplos:

Calcular el área del cuadrilátero formado por los puntos de intersección de las rectas:
$L_1: 8x - 6y + 15 = 0$; $L_2: 3x + 4y + 10 = 0$; $L_3: 3y - 4x - 35 = 0$ y $L_4: 8y + 6x - 25 = 0$



$$\mathbf{d_1} = \frac{|15 - 70|}{\sqrt{8^2 + 6^2}}$$

$$\mathbf{d_1} = 5{,}5$$

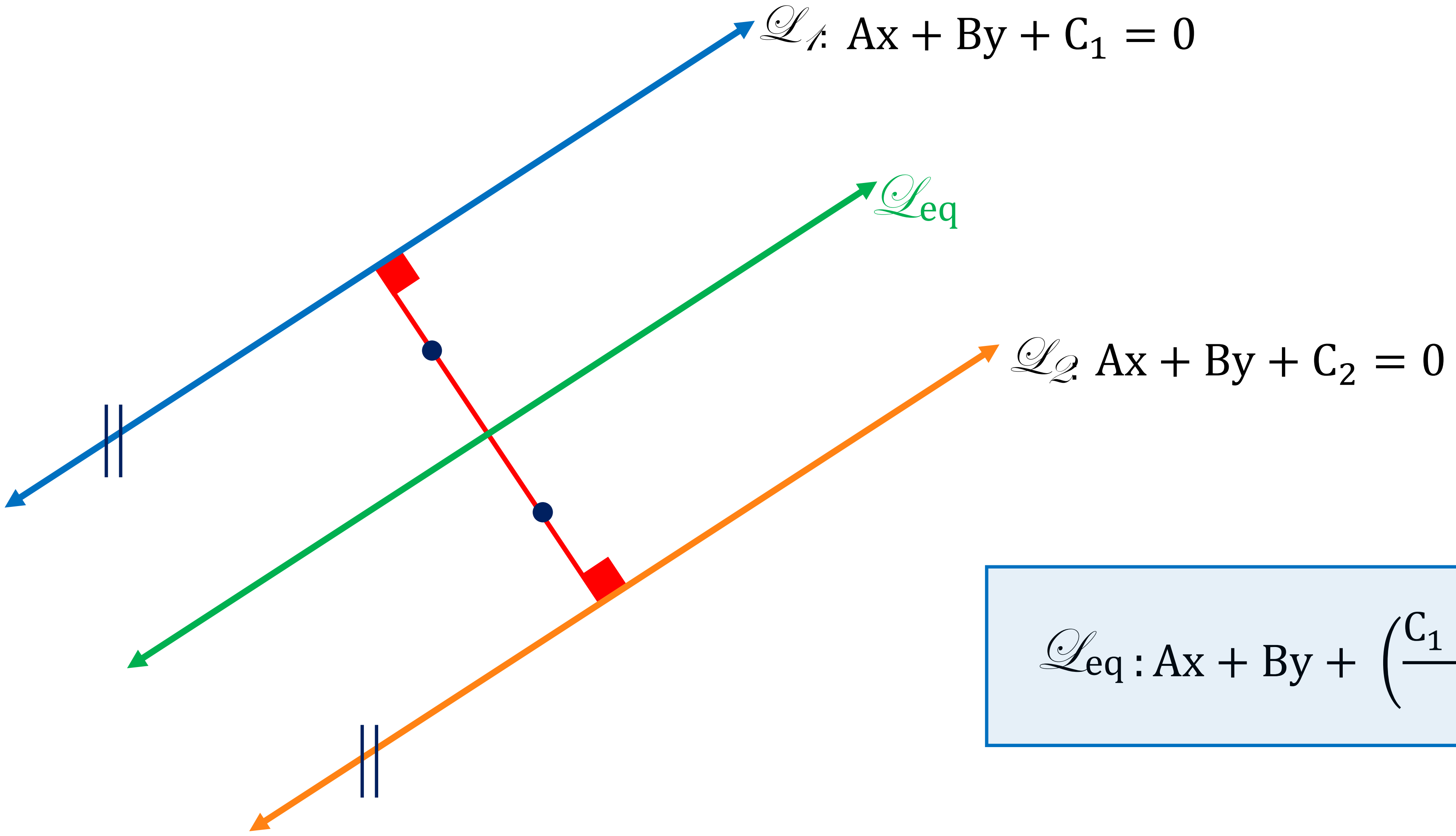
$$\mathbf{d_2} = \frac{|20 - (-25)|}{\sqrt{6^2 + 8^2}}$$

$$\mathbf{d_2} = 4{,}5$$

$$S = 5{,}5x4{,}5$$

$$\therefore S = 24{,}75$$

f) Ecuación de la recta equidistante:



$$\mathscr{L}_{eq} : Ax + By + \left(\frac{C_1 + C_2}{2}\right) = 0$$

LA RECTA

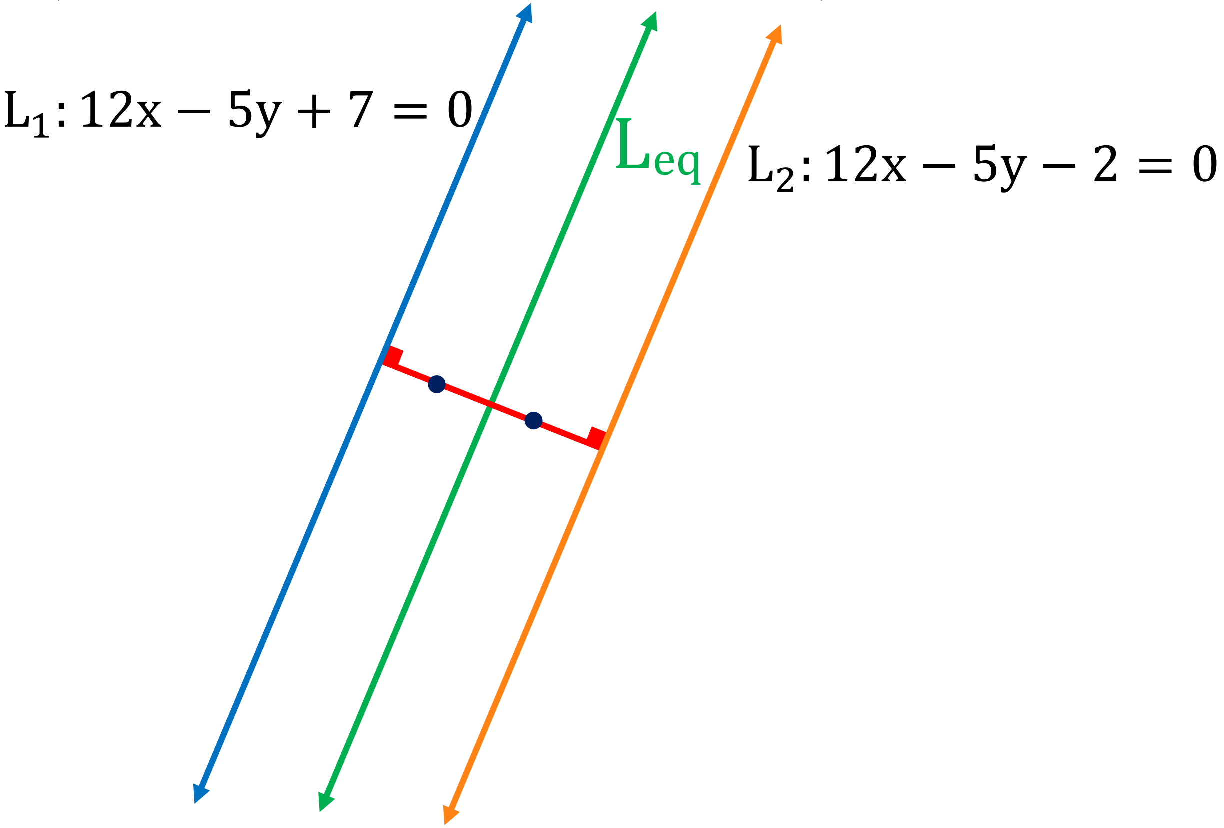
Ejemplos:

Hallar la ecuación de la recta cuyos puntos equidistan de las rectas paralelas:

$L_1: 12x - 5y + 7 = 0 \wedge L_2: 12x - 5y - 2 = 0$

A) $12x - 5y - 1 = 0$ B) $10y - 24x - 5 = 0$ C) $10y - 24x - 1 = 0$

D) $12x - 5y + 2 = 0$ E) $10y - 24x - 3 = 0$



- $L_{eq}: 12x - 5y + \left(\frac{7+(-2)}{2}\right) = 0$

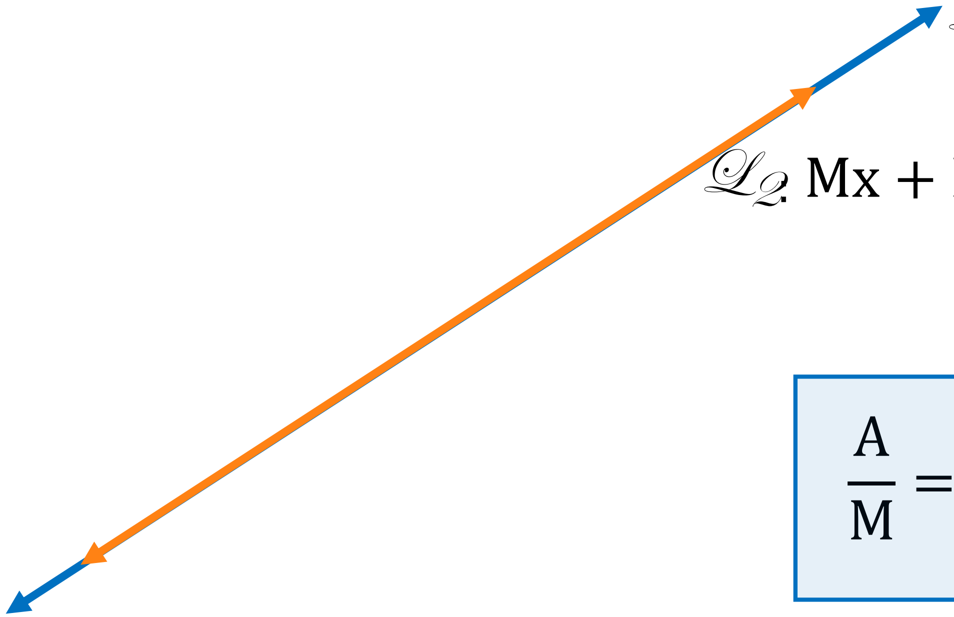
$L_{eq}: 12x - 5y + \dfrac{5}{2} = 0$

$L_{eq}: 24x - 10y + 5 = 0$

$L_{eq}: 10y - 24x - 5 = 0$

LA RECTA

g) Rectas coincidentes:



$$\mathscr{L}_1: \mathrm{Ax} + \mathrm{By} + \mathrm{C} = 0$$

$$\mathscr{L}_2: \mathrm{Mx} + \mathrm{Ny} + \mathrm{P} = 0$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{M}} = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{N}} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{P}}}$$

❖ Importante !!

Dos rectas coinciden si tienen un punto en común y la misma dirección o pendiente

Sea $L_1: Ax + By + C = 0 \wedge L_2: A'x + B'y + C' = 0$

- La intersección de la recta (1) con el eje X es $-\frac{C}{A}$ y de la recta (2) es $-\frac{C'}{A'}$

  Por lo tanto: $-\frac{C}{A} = -\frac{C'}{A'}$ o sea $\frac{A}{A'} = \frac{C}{C'}$

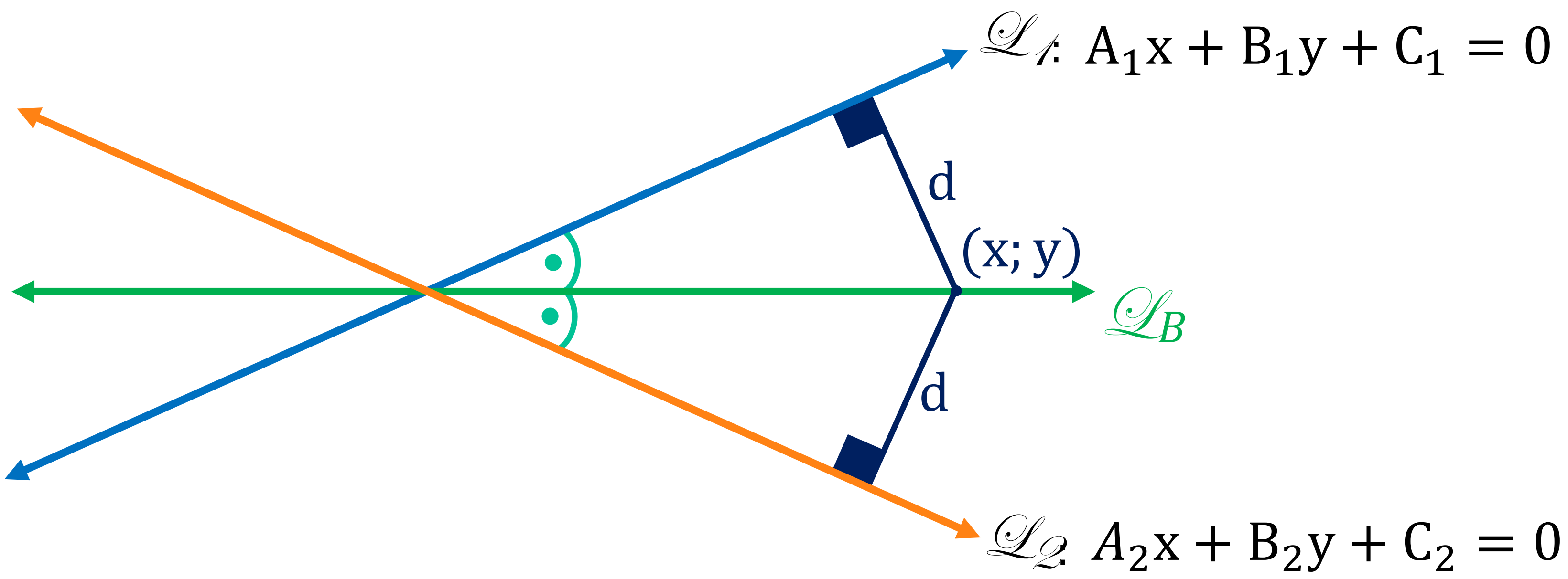
- También por ser las pendientes iguales $-\frac{A}{B} = -\frac{A'}{B'}$

  O sea $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$

- Conclusión tenemos : $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$; es decir dos rectas coinciden si y solo si sus coeficientes correspondientes son proporcionales

$\boxed{A = kA', B = kB', C = kC'}$; k es una constante diferente de cero

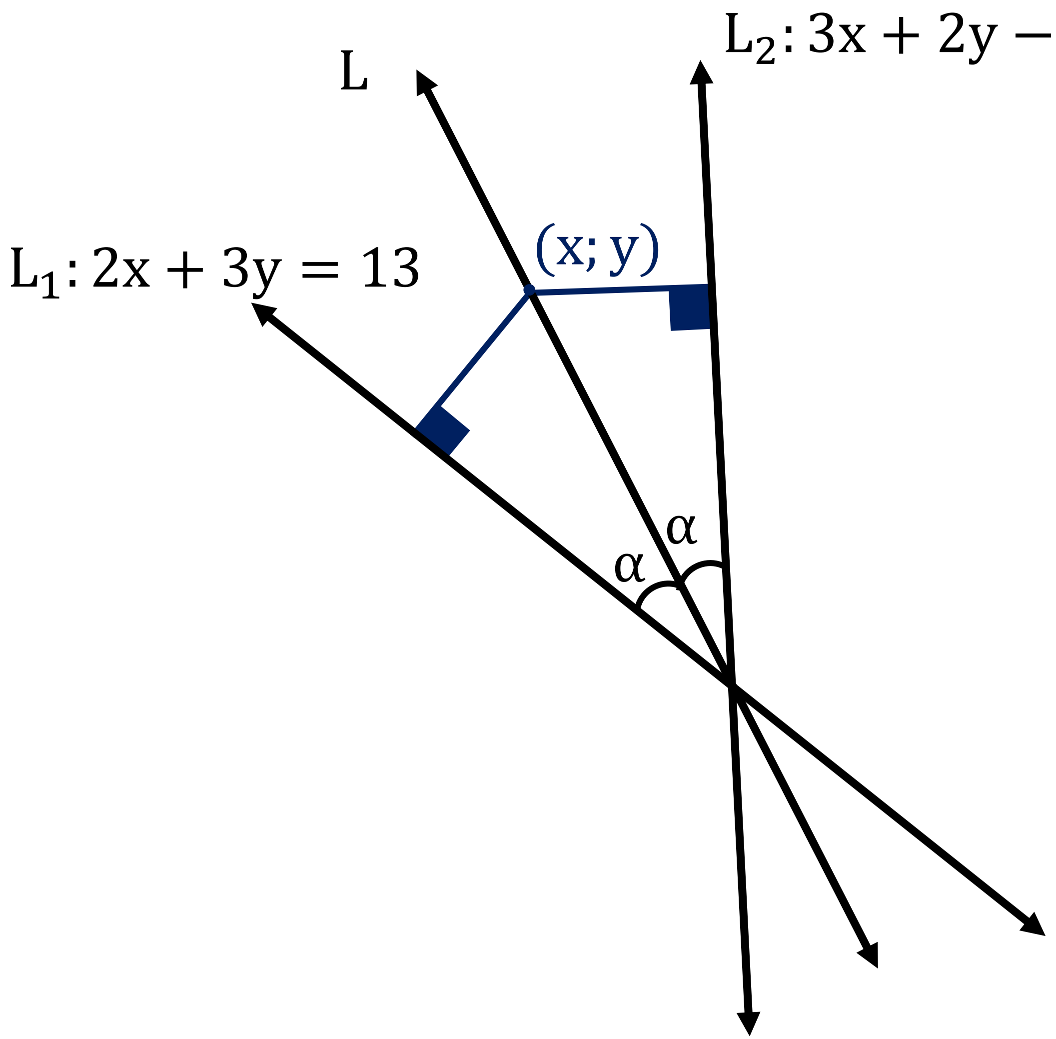
h) Ecuación de la recta bisectriz:



$$\frac{|A_1(x) + B_1(y) + C_1|}{\sqrt{{A_1}^2 + {B_1}^2}} = \frac{|A_2(x) + B_2(y) + C_2|}{\sqrt{{A_2}^2 + {B_2}^2}}$$

Ejemplos:

Del grafico mostrado, determine la ecuación de L.



$$\frac{|2(x) + 3(y) - 13|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{|3(x) + 2(y) - 12|}{\sqrt{3^2 + 2^2}}$$

$$\frac{|2x + 3y - 13|}{\cancel{\sqrt{13}}} = \frac{|3x + 2y - 12|}{\cancel{\sqrt{13}}}$$

- $2x + 3y - 13 = 3x + 2y - 12$

  $\mathbf{x - y + 1 = 0}$

- $2x + 3y - 13 = -3x - 2y + 12$

  $\mathbf{x + y - 5 = 0}$